

# MATEMATICĂ

## Teste rezolvate Bacalaureat



Specializări:

- matematică-informatică
- științe ale naturii
- tehnologic

# TESTE

✓ **M\_mate-info**

✓ **M\_șt-nat**

✓ **M\_tehnologic**

**TEST 1 (M\_mate-info)**

**SUBIECTUL I (30 de puncte)**

- 1) Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{-1+x}{3}$ . Calculați  $f(-3) \cdot f(-2) \cdot \dots \cdot f(3)$ .
- 2) Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_3(2x - 3955) = 4$ .
- 3) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi inecuația:  $x^2 - x - 10 < 2$ .
- 4) Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $M = \{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[3]{100}\}$ , acesta să fie irațional.
- 5) Fie punctele  $A(-3, 0), B(0, -4)$ . Să se calculeze modulul vectorului  $\overline{AB}$ .
- 6) Se consideră triunghiul ABC cu  $B = \sqrt{3}, AC = \sqrt{2}, BC = \sqrt{6}$ . Să se calculeze  $\cos B$ .

**SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)**

- 1) Se consideră matricele  $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & \lg x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}, x > 0$ .
  - a) Să se calculeze  $\det(M(x)), \forall x > 0$ .
  - b) Să se arate că  $M(x) \cdot M(y) = M(xy), \forall x, y > 0$ .
  - c) Să se calculeze  $M(1) + M(2) + \dots + M(2018)$ .
- 2) Se consideră inelul  $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ .
  - a) Să se calculeze produsul elementelor inversabile în raport cu înmulțirea din inelul  $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ .
  - b) Să se rezolve în inelul  $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$  ecuația  $\hat{4}x + \hat{2} = \hat{6}$ .
  - c) Să se rezolve în inelul  $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$  sistemul  $\begin{cases} x + y = \hat{2} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{5} \end{cases}$ .

**SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)**

- 1) Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \geq 0 \\ 2^x + 2017, & x < 0 \end{cases}$  unde  $a \in \mathbb{R}$ .
  - a) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f$  să fie continuă în  $x_0 = 0$ .
  - b) Să se arate că funcția  $f'$  este crescătoare pe  $(0; \infty), \forall a \in \mathbb{R}$ .
  - c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((f(x) - 2017) \cdot x)$ .
- 2) Se consideră funcția  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x + 2}$ .
  - a) Să se calculeze  $\int f^2(x) dx$ .
  - b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f$ , axa Ox și dreptele de ecuații  $x = 0$  și  $x = 1$ .
  - c) Folosind eventual faptul că  $\sqrt{x + 2} \leq \sqrt{3}, \forall x \in [0, 1]$ , să se arate că  $\int_0^1 x^{2017} f(x) dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2018}$ .

## TEST 24 (M\_șt-nat)

### SUBIECTUL I (30 de puncte)

- 1) Să se determine al treisprezecelea termen al șirului 1,6,11,16, .... .
- 2) Care este probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea {10,11,12, ...,99} , acesta să fie divizibil cu 5?
- 3) Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\sqrt{5x - 6} = x$ .
- 4) Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$  . Să se calculeze  $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(10)$ .
- 5) Să se determine ecuația dreptei ce trece prin punctele  $A(-1,2)$  și  $B(3,0)$ .
- 6) Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că  $AB = \sqrt{3}, AC = \sqrt{6}, m(\sphericalangle A) = 45^\circ$ .

### SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

- 1) Se consideră determinantul  $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$  unde  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$  sunt soluțiile ecuației  $x^3 - 4x = 0$ .
  - a) Să se calculeze  $x_1 + x_2 + x_3$ .
  - b) Să se calculeze  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ .
  - c) Să se calculeze valoarea determinantului  $\Delta$ .
- 2) Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție  $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$ .
  - a) Să se arate că  $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .
  - b) Să se demonstreze că  $x \circ 3 = 3, \forall x \in \mathbb{R}$ .
  - c) Știind că legea de compoziție "  $\circ$  " este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei  $E = (-2018) \circ (-2017) \circ \dots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 2018$ .

### SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

- 1) Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = xe^x$ .
  - a) Să se determine punctul de extrem al funcției f.
  - b) Să se determine ecuația asimptotei spre  $-\infty$  la graficul funcției f.
  - c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x}{x^2}$ .
- 2) Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + e^x$  .
  - a) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
  - b) Să se calculeze  $\int_0^1 xf(x)dx$ .
  - c) Să se calculeze  $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx$ .

**TEST 45 (M\_tehnologic)**

**SUBIECTUL I (30 de puncte)**

- 1) Să se demonstreze că numărul  $\sqrt[3]{64} + 2^{\log_2 1} + \log_3 \frac{1}{9}$  este natural.
- 2) Știind că  $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile ecuației  $x^2 - 2018x + 1 = 0$ , să se calculeze  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ .
- 3) Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\ln^2 x - 2\ln x - 3 = 0$ .
- 4) După o reducere a prețului cu 30%, un produs costă 1412,6 lei. Să se calculeze prețul inițial al produsului.
- 5) În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-2, -5)$  și  $B(6, 1)$ . Să se determine coordonatele punctului  $C$ , știind că  $B$  este mijlocul segmentului  $AC$ .
- 6) În triunghiul  $ABC$ ,  $AC = 5\sqrt{3}$ , iar lungimea razei cercului circumscris triunghiului este egală cu 5. Să se calculeze  $\sin B$ .

**SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)**

- 1) Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
  - a) Să se calculeze  $A^2$ .
  - b) Să se arate că  $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .
  - c) Să se determine transpusa matricei  $B = A + A^2 + \dots + A^{2018}$ .
- 2) Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă
 
$$x * y = xy - 5(x + y) + 30$$
  - a) Să se arate că  $x * y = (x - 5)(y - 5) + 5, \forall x, y \in \mathbb{R}$
  - b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x * x * x = x$ .
  - c) Să se calculeze  $1 * 2 * 3 * \dots * 2018$ .

**SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)**

- 2) Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$ .
  - a) Să se calculeze  $f' \left( \frac{e^2}{2} \right)$ .
  - b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției  $f$ .
  - c) Arătați că  $\frac{2}{e} \geq f(x), \forall x \in (0, \infty)$ .
- 2) Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 1 - x, & x > 0 \end{cases}$ 
  - a) Să se arate că funcția  $f$  admite primitive.
  - b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției  $f$  este convexă pe  $(-\infty; 0)$ .
  - c) Să se calculeze  $\int_{-1}^2 f(x) dx$ .

# REZOLVĂRI TESTE

✓ **M\_mate-info**

✓ **M\_șt-nat**

✓ **M\_tehnologic**

### Rezolvare Test 1 (M\_mate-info)

#### SUBIECTUL I (30 de puncte)

$$1) f(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1+x}{3} = 0 \Rightarrow -1 + x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow$$

$$f(-3) \cdot f(-2) \cdot \dots \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) = 0$$

2) Avem condiția de existență :  $2x - 3955 > 0 \Rightarrow 2x > 3955 \Rightarrow x > 1977,5 \Rightarrow$   
 $x \in (1977,5; \infty)$ . Din  $\log_3(2x - 3955) = 4 \Rightarrow 2x - 3955 = 3^4 \Rightarrow 2x = 81 + 3955 \Rightarrow$   
 $2x = 4036 \Rightarrow x = 2018 \in (1977,5; \infty) \Rightarrow S = \{2018\}$ .

3)  $x^2 - x - 10 < 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 < 0$ . Ecuația  $x^2 - x - 12 = 0$  are soluțiile  
 $x_1 = -3, x_2 = 4$ . Din tabelul de semne obținem  $\in (-3; 4)$ , cum  
 $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\} \Rightarrow S = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ .

4) Cuburi perfecte mai mici decât 100 sunt:  $1^3 = 1, 2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64$ . Deci din  
 mulțimea  $M = \{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \dots, \sqrt[3]{100}\}$  numere raționale sunt  $\sqrt[3]{1} = 1, \sqrt[3]{8} = 2, \sqrt[3]{27} = 3, \sqrt[3]{64} = 4$   
 (deci 4 numere raționale)  $\Rightarrow$  cazuri favorabile vor fi  $100 - 4 = 96$  (numere iraționale).

$$\text{probabilitatea} = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}} = \frac{96}{100} = 0,96 \text{ sau } 96\% .$$

$$5) \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

$$6) \text{ Din teorema cosinusului } \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{3+6-2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{7}{6\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{12}.$$

#### SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

$$1) \text{ a) } \det(M(x)) = \begin{vmatrix} 1 & \lg x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot x = x \text{ (ceilalți termeni ai dezvoltării sunt toți nuli)}$$

$$\text{b) } M(x) \cdot M(y) = \begin{pmatrix} 1 & \lg x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \lg y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lg x + \lg y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lg xy & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix} = M(xy), \forall x, y > 0.$$

$$\text{c) } M(1) + M(2) + \dots + M(2018) = \begin{pmatrix} 1 & \lg 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \lg 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \dots +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lg 2018 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2018 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{de } 2018 \text{ ori}} & \lg 1 + \lg 2 + \dots + \lg 2018 & 0 \\ 0 & \underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{de } 2018 \text{ ori}} & 0 \\ 0 & 0 & 1+2+\dots+2018 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2018 & \lg(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2018) & 0 \\ 0 & 2018 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2018 \cdot 2019}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2018 & \lg(2018!) & 0 \\ 0 & 2018 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2018 \cdot 2019}{2} \end{pmatrix}.$$

2) a) Mulțimea elementelor inversabile este:  $U(\mathbb{Z}_{12}) = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{11}\}$  (un element  $\hat{a}$  este inversabil în  $\mathbb{Z}_{12} \Leftrightarrow (a, 12) = 1 \Rightarrow \hat{1} \cdot \hat{5} \cdot \hat{7} \cdot \hat{11} = \hat{1}$ ).

b)  $\hat{4}x + \hat{2} = \hat{6}, x \in \mathbb{Z}_{12} \Leftrightarrow \hat{4}x + \hat{2} + \hat{10} = \hat{6} + \hat{10} \Leftrightarrow \hat{4}x = \hat{4} \Rightarrow x \in \{\hat{1}, \hat{4}, \hat{7}, \hat{10}\}$ .

c)  $\begin{cases} x + y = \hat{2} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{5} \end{cases}$ . Pentru a reduce necunoscuta  $y$  înmulțim prima ecuație cu  $-\hat{3} = \widehat{12-3} = \hat{9}$

în  $\mathbb{Z}_{12} \begin{cases} x + y = \hat{2} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{9}x + \hat{9}y = \hat{6} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{5} \end{cases}$  adunând cele două ecuații obținem  $\hat{11}x = \hat{11} \Rightarrow$

$x \in \{\hat{1}\}$ . Pentru  $x = \hat{1}$  prima ecuație din sistem devine  $\hat{1} + y = \hat{2} \Rightarrow y = \hat{1}$  (1)

Pentru  $x = \hat{1}$  a doua ecuație din sistem devine  $\hat{2} + \hat{3}y = \hat{5} \Rightarrow \hat{3}y = \hat{3} \Rightarrow y \in \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{9}\}$  (2)

Din (1) și (2)  $\Rightarrow$  soluția sistemului este  $S = \{(\hat{1}, \hat{1})\}$ .

### SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1) a)  $f$  este continuă în  $x_0 = 0 \Leftrightarrow l_s(0) = l_d(0) = f(0)$ .

$$l_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2^x + 2017) = 2018; \quad l_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + a) = a;$$

$$f(0) = a \Rightarrow a = 2018$$

c) Pentru  $x > 0 \Rightarrow f'(x) = (x^2 + a)' = 2x \Rightarrow f''(x) = (2x)' = 2 > 0, \forall x > 0, \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$f'$  este crescătoare pe  $(0; \infty), \forall a \in \mathbb{R}$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} ((f(x) - 2017) \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2^{-x}} = 0.$$

$$2) a) \int f^2(x) dx = \int \sqrt{x+2}^2 dx = \int (x+2) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C.$$

b)  $A = \int_0^1 |f(x)| dx$ . Cum  $f(x) = \sqrt{x+2} > 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow |f(x)| = f(x)$  pentru

$$x \in [0,1] \Rightarrow A = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x+2} dx = \int_0^1 (x+2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_0^1 =$$

$$\frac{2}{3} (x+2)\sqrt{x+2} \Big|_0^1 = \frac{6\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{6\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{3}.$$



c) Deoarece  $\sqrt{x+2} \leq \sqrt{3}, \forall x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{3}, \forall x \in [0,1] \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x^{2017}f(x) \leq x^{2017}\sqrt{3}, \forall x \in [0,1] &\Rightarrow \int_0^1 x^{2017}f(x)dx \leq \int_0^1 x^{2017}\sqrt{3}dx = \sqrt{3} \int_0^1 x^{2017}dx \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{x^{2018}}{2018} \Big|_0^1 = \sqrt{3} \cdot \left( \frac{1^{2018}}{2018} - \frac{0^{2018}}{2018} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2018} \Rightarrow \int_0^1 x^{2017}f(x)dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2018} \end{aligned}$$

## Rezolvare Test 24 (M\_șt-nat)

### SUBIECTUL I (30 de puncte)

- Șirul este o progresie aritmetică  $(a_n)_n$  cu primul termen  $a_1 = 1$  și rația  

$$r = a_{n+1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow r = 6 - 1 = 11 - 6 = 16 - 11 = \dots = 5$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_{13} = a_1 + 12r = 1 + 12 \cdot 5 = 61$$
- Mulțimea are  $99 - 9 = 90$  elemente (90 cazuri posibile). Dintre acestea, divizibile cu 5 sunt numerele care au ultima cifră 0 sau 5, adică  $\{10, 15, \dots, 95\}$  (sau  $5 \cdot 2, 5 \cdot 3, \dots, 5 \cdot 19$ , de la 2 la 19 sunt 18 numere), deci 18 cazuri favorabile. *probabilitatea* =  

$$\frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5} \text{ sau } 0,2 \text{ sau } 20\%.$$
- Condiții de existență:  $5x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{6}{5} \Rightarrow x \in [\frac{6}{5}; \infty)$  și  $x \geq 0 \Rightarrow x \in [0; \infty)$   
 (această condiție apare din faptul că membrul stâng e pozitiv, deci și membrul drept trebuie să fie pozitiv)  $\Rightarrow x \in [\frac{6}{5}; \infty) \cap [0; \infty) \Rightarrow x \in [\frac{6}{5}; \infty)$ . Ridicând la pătrat ecuația devine:  $5x - 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ , cu soluțiile  $x_1 = 2 \in [\frac{6}{5}; \infty)$ ,  $x_2 = 3 \in [\frac{6}{5}; \infty)$   

$$\Rightarrow S = \{2; 3\}$$
- $f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$ ;  $f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$ ;  $f(3) = 3 \cdot 3 - 1 = 8 \dots \dots \dots$   

$$f(10) = 3 \cdot 10 - 1 = 29 \Rightarrow$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(10) = 2 + 5 + 8 + \dots + 29 = \frac{(2 + 29)10}{2} = 31 \cdot 5 = 155$$
- Ecuația dreptei ce trece prin punctele  $A(x_A, y_A)$  și  $B(x_B, y_B)$  este:  

$$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$AB: 2x + 3y - 0 - 6 + y - 0 = 0 \Rightarrow AB: 2x + 4y - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$AB: x + 2y - 3 = 0.$$
- $A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sin 45^\circ}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{3}{2}.$

### SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

- a)  $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{0}{1} = 0$  (din relațiile lui Viète)  
 sau  $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$   
 $\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 + 2 + (-2) = 0.$
- b) Orice soluție verifică ecuația din care provine  
 $\Rightarrow x_1^3 - 4x_1 = 0; x_2^3 - 4x_2 = 0; x_3^3 - 4x_3 = 0.$  Adunând cele trei relații obținem:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 4(x_1 + x_2 + x_3) = 0. \text{ Folosind punctual a)} \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0.$$

$$\text{c) } \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_2 & x_2 & x_3 \\ x_1 + x_2 + x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_1 + x_2 + x_2) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1 & x_3 & x_1 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ (conform punctului a)).}$$

$$2) \text{ a) } " \Rightarrow " x \circ y = xy - 3(x + y) + 12 = xy - 3x - 3y + 12 = x(y - 3) - 3y + 9 + 3 = x(y - 3) - 3(y - 3) + 3 = (y - 3)(x - 3) + 3 = (x - 3)(y - 3) + 3$$

$$" \Leftarrow " (x - 3)(y - 3) + 3 = xy - 3x - 3y + 9 + 3 = xy - 3(x + y) + 12 = x \circ y$$

$$\text{b) } x \circ 3 = (x - 3)(3 - 3) + 3 = (x - 3) \cdot 0 + 3 = 3, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (am folosit punctul a)}$$

$$\text{c) } 3 \circ y = (3 - 3)(y - 3) + 3 = 0 \cdot (y - 3) + 3 = 3, \forall y \in \mathbb{R}. \text{ \u0158tiind c\u0103 legea de compozi\u021bie " \circ " este asociativ\u0103 \u015fi folosind } x \circ 3 = 3, \forall x \in \mathbb{R}; 3 \circ y = 3, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$E = (-2018) \circ (-2017) \circ \dots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 2018 = \underbrace{(-2018) \circ (-2017) \circ \dots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 \circ 5 \circ \dots \circ 2018}_x \circ y = 3 \circ y = 3, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

### SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)  $f'(x) = (xe^x)' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$ . Ecua\u021bia  $f'(x) = 0$  are solu\u021bia  $x = -1$ ,  $f(-1) = -\frac{1}{e}$ . Deoarece pentru  $x < -1$ ,  $f'(x) < 0$ , iar dac\u0103  $x > -1$ ,  $f'(x) > 0$ , punctul de coordonate  $(-1; -\frac{1}{e})$  este punct de minim.

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0 \Rightarrow y = 0$  este ecua\u021bia asimptotei orizontale spre  $-\infty$ .

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(e^x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty.$$

2) a) Fie  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o primitiv\u0103 a func\u021biei  $f \Rightarrow F'(x) = f(x) = x^2 + e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$F$  este cresc\u0103toare pe  $\mathbb{R}$ .

$$\text{b) } \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x(x^2 + e^x)dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 xe^x dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + e^x(x - 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$

$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)' dx = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 x' \cdot e^x dx = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = xe^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = e^x(x - 1) \Big|_0^1 = e(1 - 1) - e^0(0 - 1) = 1$$

c) Efectuând schimbarea de variabilă  $= \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$ . Pentru  $x = 1 \Rightarrow t = \ln 1 = 0$ , pentru  $x = e \Rightarrow t = \ln e = 1$ . Din teorema de schimbare de variabilă deducem că  $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (t^2 + e^t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + e^t\right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} + e\right) - \left(\frac{0}{3} + e^0\right) = \frac{1}{3} + e - 1 = \frac{3e-2}{3}$ .

## Rezolvare Test 45 (M\_tehnologic)

### SUBIECTUL I (30 de puncte)

- $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$ ;  $2^{\log_2 1} = 1$ ;  $\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2 \Rightarrow$   
 $\sqrt[3]{64} + 2^{\log_2 1} + \log_3 \frac{1}{9} = 4 + 1 - 2 = 3 \in \mathbb{N}$ .
- $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile ecuației  $x^2 - 2018x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{-2018}{1} = 2018$  și  
 $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{1} = 1$  (relațiile lui Viète).  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{2018}{1} = 2018$ .
- Avem condiția de existență:  $x > 0 \Rightarrow x \in (0; \infty)$ . Notăm  $\ln x = y$   
 $\Rightarrow \ln^2 x - 2 \ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 \Rightarrow y_1 = -1, y_2 = 3 \Rightarrow$   
 $\ln x = -1 \Rightarrow x_1 = e^{-1} = \frac{1}{e} \in (0; \infty)$ ,  $\ln x = 3 \Rightarrow x_2 = e^3 \in (0; \infty) \Rightarrow S = \{\frac{1}{e}; e^3\}$ .
- $x = \text{prețului inițial al produsului} \Rightarrow x - \frac{30}{100} \cdot x = 1412,6 \Rightarrow \frac{70}{100} \cdot x = 1412,6 \Rightarrow$   
 $x = \frac{1412,6 \cdot 100}{70} \Rightarrow x = 2018 \text{ lei}$ .
- $B$  mijlocul segmentului  $AC$ ,  $x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 6 = \frac{-2 + x_C}{2} \Rightarrow x_C - 2 = 12 \Rightarrow x_C = 14$ ,  
 $y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 1 = \frac{-5 + y_C}{2} \Rightarrow y_C - 5 = 2 \Rightarrow y_C = 7 \Rightarrow C(14, 7)$ .
- Din teorema sinusului avem  $\frac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow \sin B = \frac{AC}{2R} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

### SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

- a)  $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  
 b) Fie propoziția  $P(n): A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , demonstrăm prin inducție matematică:

Verificare  $P(2): A^2 = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  adevărat conform punctului a).

Presupunem  $P(k)$  adevărat, adică  $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , și demonstrăm  $P(k+1)$ ,

adică  $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 3^{k+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{k+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(k+1) \text{ adevărat } \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$$

pentru că ambele etape sunt verificate  $\Rightarrow P(n)$  adevărat  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

$$c) B = A + A^2 + \dots + A^{2018} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 3^{2018} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 + 3^2 + \dots + 3^{2018} & 0 \\ 0 & \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\text{de 2018 ori}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{3^{2018}-1}{3-1} & 0 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot (3^{2018} - 1) & 0 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix}$$

$$B^t = B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot (3^{2018} - 1) & 0 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix}.$$

(pentru suma  $3 + 3^2 + \dots + 3^{2018} = 3 \cdot \frac{3^{2018}-1}{3-1} = \frac{3}{2} \cdot (3^{2018} - 1)$  am folosit formula

$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$  de la progresia geometrică)

$$2. a) " \Rightarrow " x * y = xy - 5(x + y) + 30 = xy - 5x - 5y + 30 = x(y - 5) - 5(y - 5) + 5 = (y - 5)(x - 5) + 5 = (x - 5)(y - 5) + 5$$

$$" \Leftarrow " (x - 5)(y - 5) + 5 = xy - 5x - 5y + 30 = xy - 5(x + y) + 30 = x * y$$

$$b) x * x = (x - 5)(x - 5) + 5 = (x - 5)^2 + 5$$

$$x * x * x = (x * x) * x = [(x - 5)^2 + 5] * x = [(x - 5)^2 + 5 - 5](x - 5) + 5 =$$

$$= (x - 5)^3 + 5 \Rightarrow x * x * x = x \Leftrightarrow (x - 5)^3 + 5 = x$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^3 - (x - 5) = 0 \Leftrightarrow (x - 5)[(x - 5)^2 - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(x - 5 - 1)(x - 5 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x - 5)(x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 6 \Rightarrow S = \{4; 5; 6\}$$

$$c) x * 5 = (x - 5)(5 - 5) + 5 \Rightarrow x * 5 = 5, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1);$$

$$5 * y = (5 - 5)(y - 5) + 5 \Rightarrow 5 * y = 5, \forall y \in \mathbb{R} \quad (2);$$

Legea \* este asociativă (3). Folosind (1), (2) și (3)  $\Rightarrow$

$$1 * 2 * 3 * \dots * 2018 = \underbrace{(1 * 2 * 3 * 4)}_x * 5 * \underbrace{(6 * 7 * \dots * 2018)}_y = x * 5 * y =$$

$$(x * 5) * y = 5 * y = 5, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

### SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

$$1. a) f'(x) = \left( \frac{\ln(2x)}{x} \right)' = \frac{(\ln 2x)' \cdot x - x' \cdot \ln 2x}{x^2} = \frac{1 - \ln 2x}{x^2};$$

$$f' \left( \frac{e^2}{2} \right) = \frac{1 - \ln(2 \cdot \frac{e^2}{2})}{\left( \frac{e^2}{2} \right)^2} = \frac{1 - 2}{\left( \frac{e^2}{2} \right)^2} = \frac{-1}{\frac{e^4}{4}} = -\frac{4}{e^4}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 2x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ este ecuația asimptotei orizontale}$$

spre  $+\infty$  la graficul funcției f.

$$c) f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{e}{2} \text{ deci } \frac{e}{2} \text{ este punct de maxim} \Rightarrow f \left( \frac{e}{2} \right) \text{ este valoarea maximă a funcției f}$$

$$\Rightarrow f \left( \frac{e}{2} \right) \geq f(x), \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow \frac{2}{e} \geq f(x), \forall x \in (0, \infty)$$

2) a) Pe  $(-\infty; 0)$   $f$  este continuă (funcție elementară exponențială), pe  $(0; \infty)$   $f$  este continuă (funcție elementară polinomială). Studiem continuitatea în 0:

$$l_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^x = e^0 = 1, f(0) = e^0 = 1; l_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 - x) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow$$

$l_s(0) = l_d(0) = f(0) \Rightarrow f$  este continuă în 0  $\Rightarrow f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive.

b) Fie  $F$  o primitivă a funcției  $f$  pe  $(-\infty; 0) \Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in (-\infty; 0)$

$\Rightarrow F''(x) = f'(x), \forall x \in (-\infty; 0) \Rightarrow F''(x) = f'(x) = (e^x)' = e^x > 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Rightarrow F$  este convexă pe  $(-\infty; 0)$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 e^x dx + \int_0^2 (1 - x) dx = e^x \Big|_{-1}^0 + x \Big|_0^2 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \\ &= e^0 - e^{-1} + 2 - 0 - \frac{2^2}{2} + \frac{0^2}{2} = 1 - \frac{1}{e} + 2 - 2 = \frac{e-1}{e}. \end{aligned}$$